Demuestre que $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}$ si A es no singular.

Dan:

- $\det(A)\neq 0$ a).

Piden:

- $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}$

Demostración:

Dado que $\det(A\,B)=\det(A\,)\det(B)$ y $A\,A^{-1}=I$, podemos relacionar la segunda ecuación con la primera, asumiendo a su vez por a). que A tiene inversa.

$$\begin{aligned}\det(A\,A^{-1}) &= \det(A)\det(A^{-1})\\ \det(I) &= \det(A)\det(A^{-1})\\ 1 &= \det(A)\det(A^{-1})\\ \frac{1}{\det(A)} &= \det\left(A^{-1}\right)\end{aligned}$$

Observación 1. El determinante de la matriz identidad es 1 porque al ser una matriz triangular tanto inferior como superior, su determinante puede ser hallado con tal sólo multiplicar los elementos de su diagonal principal $(1x1x1)$.

Observación 2. El determinante de A puede ser usado como denominador pues equivale a un número cualquiera.

Así concluye la demostración. Adicionalmente, por el resultado obtenido se puede establecer que el determinante de una matriz invertible A es el cociente entre 1 y el determinante de su inversa:

$$\det(A)=\frac{1}{\det(A^{-1})}$$

Autor: Nicolás Salazar B.

Fuente: Kolman, B. & Hill, D.R. *Álgebra Lineal*. Octava Edición. Pearson, Prentice-Hall. México, 2006. Pg.194: T.10.